Sea X un espacio métrico completo, $\{F_n\}$ una sucesión de conjuntos cerrados tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Prueba que el conjunto abierto $\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{F}_n$ es denso en X.

Demostración. Sea G un abierto no vacío en X. Sabemos, por el teorema de categoría de Baire, que G es de segunda categoría en X. Supondremos que

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \overset{\circ}{F}_n \right) \cap G = \varnothing \tag{1}$$

para obtener una contradicción. En efecto, de (1) se sigue, que $\overset{\circ}{F}_n \cap G = \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap G)$, tenemos que $G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap \overline{G})$. Los conjuntos $F_n \cap \overline{G}$ son cerrados, además, como $\overset{\circ}{F}_n \cap G = \varnothing$, se tiene que $\overset{\circ}{F}_n \cap \overline{G} = \varnothing$, lo que implica que $F_n \cap \overline{G}$ tiene interior vacío. ☺